

4.4.14 Lineární funkce III

Předpoklady: 040413

Př. 1: Urči průsečíky grafu lineární funkce $y = -3x + 5$ s osami x a y .

Průsečík s osou x : y -ová souřadnice je nulová $\Rightarrow$

$$0 = -3x + 5 \quad / +3x$$

$$3x = 5 \quad / :3$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Graf funkce $y = -3x + 5$ se protíná s osou x v bodě $\left[\frac{5}{3}; 0\right]$.

Průsečík s osou y : x -ová souřadnice je nulová $\Rightarrow$

$$y = -3x + 5 = -3 \cdot 0 + 5 = 5$$

Graf funkce $y = -3x + 5$ se protíná s osou y v bodě $[0; 5]$.

Př. 2: Prohlédni si grafy lineárních funkcí, které jsi nakreslil v minulých hodinách. Kdy je lineární funkce rostoucí? Kdy je klesající?

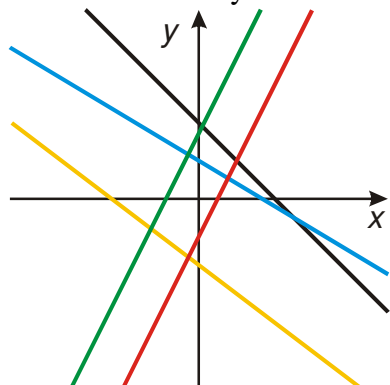
O sklonu lineární funkce rozhoduje koeficient a (koeficient b pouze posunuje graf nahoru a dolů) $\Rightarrow$

- $a > 0 \Rightarrow$ funkce je rostoucí (podobně jako u přímé úměrnosti),
- $a < 0 \Rightarrow$ funkce je klesající (podobně jako u nepřímé úměrnosti),

Př. 3: Na obrázku jsou nakresleny grafy následujících lineárních funkcí. Popiš je.

a) $y = 2x - 1$ b) $y = 2x + \sqrt{3}$ c) $y = -x + 2$ d) $y = -\frac{3}{5}x + 1$

Která z nakreslených funkcí není v nabídce? Odhadni její předpis.



Nabídka obsahuje dvě rostoucí a dvě klesající funkce $\Rightarrow$ jedna klesající funkce není v nabídce.

Rostoucí funkce:

- $y = 2x - 1$: $b = -1$ graf je posunutý směrem dolů, průsečík s osou y má v záporné hodnotě $\Rightarrow$ jde o červený graf,
- $y = 2x + \sqrt{3}$: $b = \sqrt{3}$ graf je posunutý směrem nahoru, průsečík s osou y má v kladné hodnotě $\Rightarrow$ jde o zelený graf,

Kontrola: obě rostoucí funkce by měly mít stejný sklon (mají stejný koeficient $a = 2$).

Klesající funkce:

- $y = -x + 2$: $b = 2$ graf je posunutý směrem nahoru, průsečík s osou y má v kladné hodnotě, větší než u zbývajících klesajících funkcí $\Rightarrow$ jde o černý graf,
- $y = -\frac{3}{5}x + 1$: $b = 1$ graf je posunutý směrem nahoru, průsečík s osou y má v kladné hodnotě, menší než u funkce $y = -x + 2 \Rightarrow$ jde o modrý graf,
- poslední funkce se protíná s osou y v záporné hodnotě $\Rightarrow$ nejde ani o jednu z funkcí v nabídce.

Kontrola: funkce $y = -x + 2$ má koeficient $a = -1$ s větší absolutní hodnotou než funkce

$y = -\frac{3}{5}x + 1$ ($a = -\frac{3}{5}$) $\Rightarrow$ graf funkce $y = -x + 2$ musí klesat rychleji.

Žlutá funkce nemá předpis v nabídce:

- $b < 0$ - protíná osu x v záporné hodnotě (odhadem -2),
- $a \in \left(-1; -\frac{3}{5}\right)$ (odhadem $a = -\frac{4}{5}$) - strmost grafu je větší než funkce $y = -\frac{3}{5}x + 1$ a menší než u funkce $y = -x + 2$.

Př. 4: Speciálním typem lineární funkce je funkce konstantní. Jak vypadá její předpis? Jaké má vlastnosti? Jak vypadá její graf?

Konstantní: neměnný, stálý $\Rightarrow$ zřejmě jde o funkci, jejíž hodnoty se nemění $\Rightarrow$ takovou funkcí byla funkce $y = 2$ (pro všechna x měla hodnotu 2).

Předpis konstantní funkce: $y = 0x + b = b$ (hodnota funkce nezávisí na x , protože hodnotu x násobíme nulou).

Není ani rostoucí ani klesající.

Grafem je přímka, rovnoběžná s osou x (vodorovná).

Př. 5: Narýsuj na papír se čtvercovou sítí grafy lineárních funkcí.

$$\text{a) } y = 0,5x + 1 \quad \text{b) } y = -\frac{5}{4}x - 3 \quad \text{c) } y = \frac{4}{7}x + 2 \quad \text{d) } y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$$

Při rýsování využívej mřížové body grafu.

Ve všech bodech chceme body s celočíselnými souřadnicemi $\Rightarrow$ potřebujeme za x dosazovat násobky jmenovatele zlomku koeficientu a .

a) $y = 0,5x + 1$

$b = 1 \Rightarrow$ průsečík s osou y $[0; 1]$

$x = 2: y = 0,5 \cdot 2 + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow$ bod $[2; 1]$

b) $y = -\frac{5}{4}x - 3$

$b = -3 \Rightarrow$ průsečík s osou y $[0; -3]$

$x = 4: y = -\frac{5}{4} \cdot 4 - 3 = -5 - 3 = -8 \Rightarrow$ bod $[2; 1]$

c) $y = \frac{4}{7}x + 2$

$b = 2 \Rightarrow$ průsečík s osou y $[0; 2]$

$x = 7: y = \frac{4}{7} \cdot 7 + 2 = 4 + 2 = 6 \Rightarrow$ bod $[7; 6]$

d) $y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$

Pokud za x dosadíme násobek pěti, získáme celé číslo, od kterého odečítáme $\frac{4}{5} \Rightarrow$ výsledek nebude celočíselný.

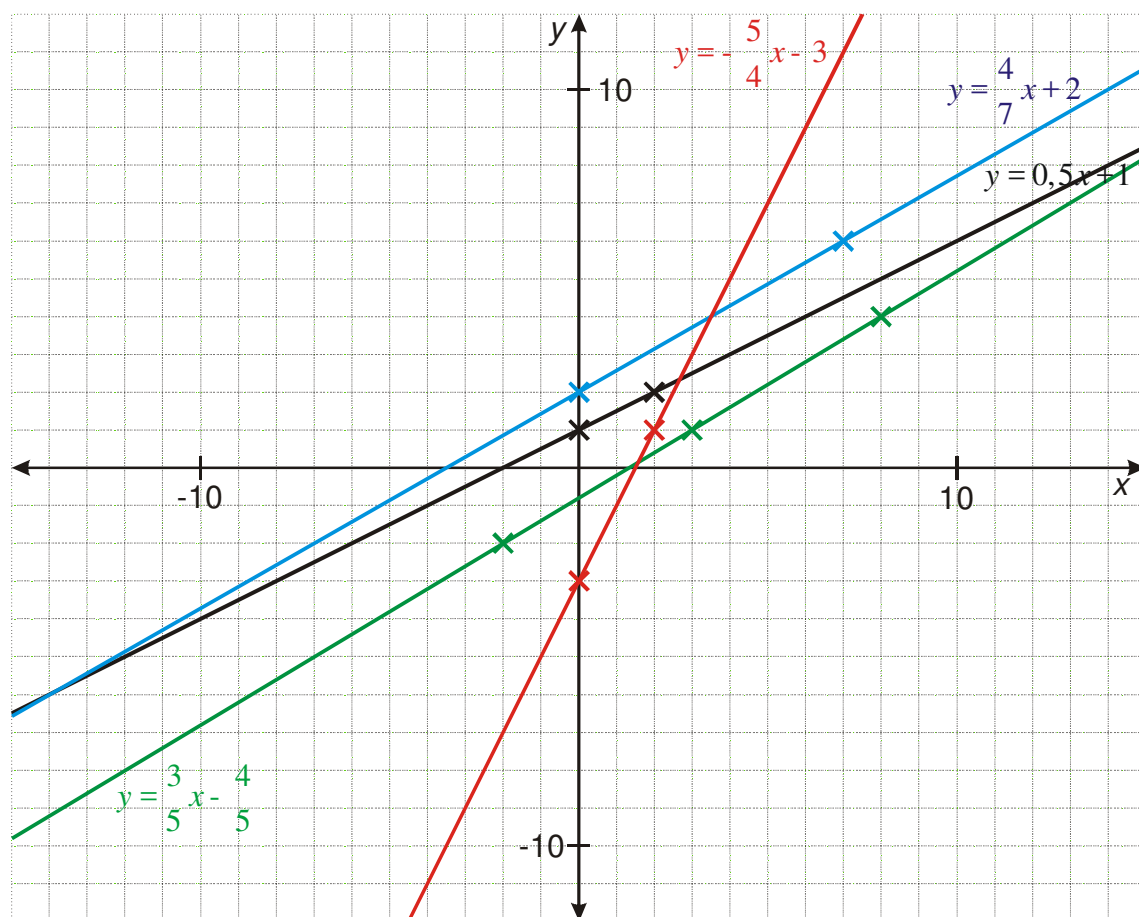
Upravíme předpis funkce: $y = \frac{1}{5}(3x - 4) \Rightarrow$ hledáme taková čísla pro x , pro která je výraz

$3x - 4$ dělitelný pěti, vyhovuje například $x = 3$, $x = 8$ nebo $x = -2$.

$x = 3: y = \frac{3}{5} \cdot 3 - \frac{4}{5} = \frac{9}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow$ bod $[3; 1]$

$x = 8: y = \frac{3}{5} \cdot 8 - \frac{4}{5} = \frac{24}{5} - \frac{4}{5} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow$ bod $[8; 4]$

$x = -2$ (pro kontrolu): $y = \frac{3}{5} \cdot (-2) - \frac{4}{5} = \frac{-6}{5} - \frac{4}{5} = \frac{-10}{5} = -2 \Rightarrow$ bod $[-2; -2]$



Dodatek: Potřebné hodnoty x je možné i vypočítat. Upravíme předpis funkce: $y = \frac{1}{5}(3x - 4)$

$\Rightarrow$ hledáme taková čísla pro x , pro která je výraz $3x - 4$ dělitelný pěti, tedy platí

$$3x - 4 = 5k \quad / +4$$

$$3x = 5k + 4 \quad / :3$$

$$x = \frac{5k + 4}{3}$$

Dosazujeme za k a počítáme hodnoty x (vybíráme celočíselné výsledky):

$$k = 1: x = \frac{5 \cdot 1 + 4}{3} = \frac{9}{3} = 3,$$

$$k = 2: x = \frac{5 \cdot 2 + 4}{3} = \frac{14}{3}$$

$$k = 3: x = \frac{5 \cdot 3 + 4}{3} = \frac{19}{3}$$

$$k = 4: x = \frac{5 \cdot 4 + 4}{3} = \frac{24}{3} = 8$$

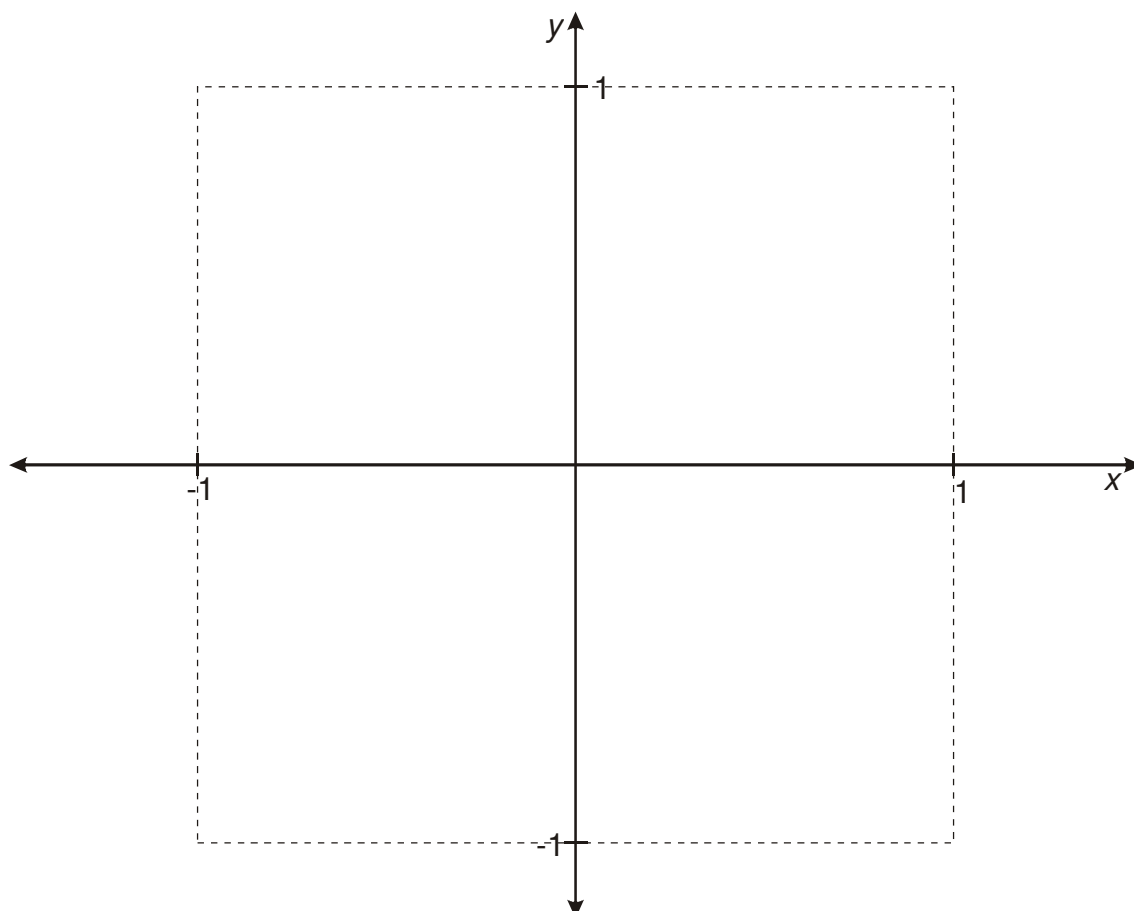
Za k je možné dosazovat i záporná čísla (prvním vyhovujícím bude $k = -2$ vedoucí na hodnotu $x = -2$).

Př. 6: Dorýsuj do obrázku grafy lineárních funkcí. Využij průsečíky grafů s vytečkovaným čtvercem.

a) $y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{4}$

b) $y = -\frac{7}{2}x + \frac{4}{3}$

c) $y = -3x + 2,5$



Vytečkovaný čtverec představuje body jejichž x -ová i y -ová souřadnice patří do intervalu $\langle -1; 1 \rangle$.

Vzdálenosti 1 na ose odpovídá 5 cm $\Rightarrow$ vypočtené souřadnice musíme násobit pěti.

a) $y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{4}$

$b = -\frac{1}{4} \Rightarrow$ bod grafu $\left[0; -\frac{1}{4}\right] \Rightarrow$ na ose y naměříme $5 \cdot \frac{1}{4} \text{ cm} = \frac{5}{4} \text{ cm} = 1,25 \text{ cm}$ směrem dolů.

$x = 1: y = \frac{3}{5} \cdot 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{12}{20} - \frac{5}{20} = \frac{7}{20} \Rightarrow$ bod $\left[1; \frac{7}{20}\right] \Rightarrow$ na pravé svislé straně čtverce naměříme $5 \cdot \frac{7}{20} \text{ cm} = \frac{7}{4} \text{ cm} = 1,75 \text{ cm}$ od osy x nahoru.

b) $y = -\frac{7}{2}x + \frac{4}{3}$

$b = -\frac{1}{4} \Rightarrow$ bod grafu $\left[0; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow$ nebude vidět na našem obrázku.

$a = -\frac{7}{2} \Rightarrow$ funkce je rychle klesající $\Rightarrow$ určitě se neprotne s pravou stranou čtverce.

Hledáme průsečíky s horní a dolní stranou čtverce.

- $y = 1: 1 = -\frac{7}{2}x + \frac{4}{3} \quad / \cdot 6$

$$6 = -7 \cdot 3x + 4 \cdot 2$$

$$6 = -21x + 8 \quad / +21x - 6$$

$$21x = 2 \quad / : 21$$

$$x = \frac{2}{21} \Rightarrow \text{bod } \left[\frac{2}{21}; 1 \right] \Rightarrow \text{na horní straně čtverce naměříme}$$

$$5 \cdot \frac{2}{21} \text{ cm} = \frac{10}{21} \text{ cm} = 0,48 \text{ cm} \text{ doprava od osy } y.$$

- $y = -1: -1 = -\frac{7}{2}x + \frac{4}{3} \quad / \cdot 6$

$$-6 = -7 \cdot 3x + 4 \cdot 2$$

$$6 = -21x + 8 \quad / +21x + 6$$

$$21x = 14 \quad / : 21$$

$$x = \frac{14}{21} \Rightarrow \text{bod } \left[\frac{14}{21}; -1 \right] \Rightarrow \text{na dolní straně čtverce naměříme}$$

$$5 \cdot \frac{14}{21} \text{ cm} = \frac{70}{21} \text{ cm} = \frac{10}{3} \text{ cm} = 3,33 \text{ cm} \text{ doprava od osy } y.$$

c) $y = -3x + 2,5$

$b = 2,5 \Rightarrow$ bod grafu $[0; 2,5] \Rightarrow$ nebude vidět na našem obrázku.

$a = -3 \Rightarrow$ funkce je rychle klesající $\Rightarrow$ hledáme průsečíky s horní a dolní stranou čtverce.

- $y = 1: 1 = -3x + 2,5 \quad / \cdot 2$

$$2 = -6x + 5 \quad / +5x - 2$$

$$6x = 3 \quad / : 6$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{bod } \left[\frac{1}{2}; 1 \right] \Rightarrow \text{na horní straně čtverce naměříme } 5 \cdot \frac{1}{2} \text{ cm} = \frac{5}{2} \text{ cm} = 2,5 \text{ cm}$$

doprava od osy y .

- $y = -1: -1 = -3x + 2,5 \quad / \cdot 2$

$$-2 = -6x + 5 \quad / +5x - 2$$

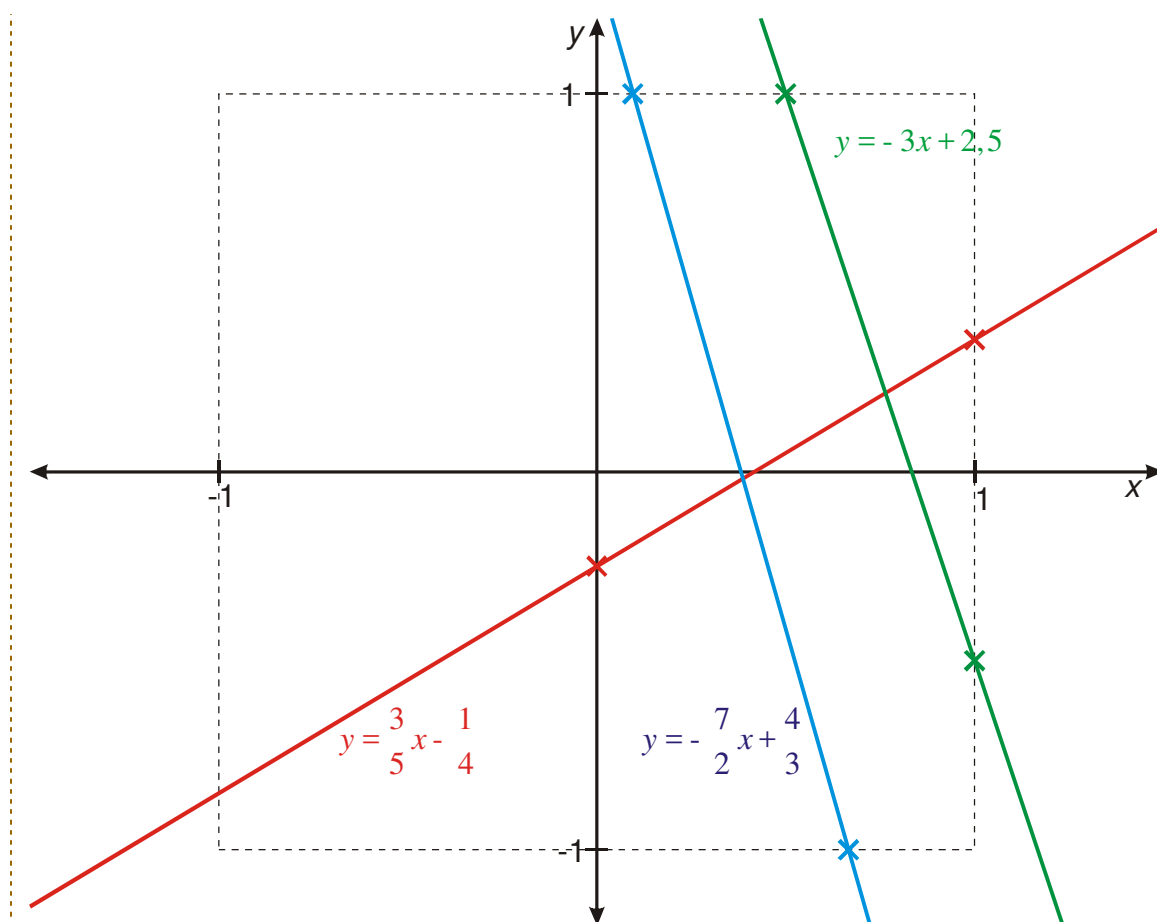
$$6x = 7 \quad / : 6$$

$$x = \frac{7}{6} \Rightarrow \text{bod } \left[\frac{7}{6}; -1 \right] \Rightarrow \text{mimo náš obrázek.}$$

$\Rightarrow$ graf funkce se musí protnout s pravou stranou čtverce.

$x = 1: y = -3 \cdot 1 + 2,5 = -0,5 \Rightarrow \text{bod } [1; -0,5] \Rightarrow \text{na pravé svislé straně čtverce naměříme}$

$5 \cdot 0,5 \text{ cm} = 2,5 \text{ cm}$ od osy x dolů.



Shrnutí: